Конкурс научно-исследовательских работ обучающихся общеобразовательных учреждений на соискание премии имени А.С. Поплаухина

Общеобразовательная дисциплина: математика

Тема: «Геометрия в одной задаче»

Автор: Сигбатова Алия , ученица 10 «А» класса

МАОУ СОШ № 8.

Руководитель: Данилова Лидия Ефимовна,

учитель математики.

г. Красноуральск

2015 г.

Содержание

Введение

Для успешного изучения стереометрии в старших классах необходимо не только знать формулы и теоремы, но и владеть различными методами решения задач. Научиться распознавать и использовать математические методы можно при рассмотрении различных решений одной и той же задачи. В этом заключается замысел работы. Обычно различные методы в школе демонстрируются на различных задачах, которые подбираются специально как имеющие наиболее эффективные решения данным методом. Однако тогда в осознании метод связывается с задачей, а его самостоятельная значимость несколько приглушается. Но когда разные методы испробованы на одной задаче, их отличительные черты, их сильные и слабые стороны выступают наиболее выпукло.

Трудности при решении геометрических задач связаны со следующими их особенностями:

- обилие определений, теорем, формул, которые нужно знать, помнить и уметь применить в конкретной ситуации;
- возможность решения одной и той же задачи различными методами;
- необходимость выполнения дополнительного построения.

Перечислим пять основных методов, применяемых к решению геометрических задач: координатный, векторный, аналитический, тригонометрический и чисто геометрический. Конечно, такое деление условно. Но очень удобно. Так как, каждый метод, нацеливает на применение различных фактов из планиметрии и стереометрии, что очень важно. Метод координат считается самым универсальным методом решения геометрических задач. В учебных пособиях мало задач, решаемых этим методом, а так же в школе не изучается в полном объеме необходимый теоретический материал. То же самое относится к векторному методу. Геометрическое решение может оказаться проще и изящнее, хотя к нему можно прийти, только догадавшись провести некоторые вспомогательные линии.

Проблема исследования заключается в нахождении геометрических задач, решаемых разными методами и изучение методов решения, для того чтобы качественно подготовиться к ЕГЭ. Данное видение проблемы определило выбор темы исследования: «Геометрия в одной задаче» (решение геометрических задач разными методами).

Объектом исследования является геометрическая задача из раздела «Планиметрия».

Предметом исследования являются методы решения.

Гипотеза состоит в том, что изучать различные методы решения геометрических задач лучше на примере одной задачи, если она будет иметь несколько способов решения.

Проблема, предмет, гипотеза исследования обусловили следующие цели и задачи.

Цель исследования: поиск рациональных методов решения геометрических задач из раздела планиметрии.

Задачи:

- изучить разнообразные методы, которые могут быть успешно применены при решении многих геометрических задач, выбрав наиболее эффективный метод решения;

- подобрать и решить несколько геометрических задач всеми методами.

Актуальность данной темы определяется необходимостью уметь решать геометрические задачи при сдаче Единого Государственного экзамена. Большинство задач по планиметрии не решается с помощью жестких алгоритмов, почти каждая геометрическая задача требует своего подхода. Здесь уже мало иметь те или иные знания, нужно уметь применять их в каждом конкретном случае. Особое значение имеет выработка разнообразных эвристических подходов, которые могут быть успешно применены при решении многих геометрических задач. Задача выступила не только в качестве иллюстрации теории, но и рассматривалась как самостоятельный объект, как средство развития исследовательской и эвристической деятельности.

Методы решения:

1. Координатный
2. Векторный
3. Аналитический
4. Тригонометрический
5. Геометрический

1. Практическое применение математических задач

При решении математических задач учащиеся обучаются применять математические знания к практическим нуждам, готовится к практической деятельности в будущем, к решению задач, выдвигаемых практикой, повседневной жизнью. Почти во всех конструкторских расчётах приходится решать математические задачи, исходя из запросов практики. Исследование и описание процессов и их свойств невозможно без привлечения математического аппарата, т.е. без решения математических задач. Математические задачи решаются в физике, химии, биологии, сопротивлении материалов, Электра и радиотехнике, особенно в их теоретических основах, и др.

Это означает, что при обучении математике учащимся следует предлагать задачи, связанные со смежными дисциплинами (физикой, химией, географией и др.), а также задачи с техническим и практическим, жизненным содержанием.

2. Значение математических задач в развитии мышления

Решение математических задач приучает выделять посылки и заключения, данные и искомые, находить общее, и особенно в данных, сопоставлять и противопоставлять факты. При решении математических задач воспитывается правильное мышление, и прежде всего, учащиеся приучаются к полноценной аргументации.

Огромная значимость нахождения учениками различных способов решения одной задачи по математике не раз отмечалась на страницах методической литературы. Однако наблюдения показывают, что на уроках, как правило, рассматривается лишь один из способов решения задачи, причём не всегда наиболее рациональный. Проводимая в таких случаях аргументация в виде отсутствия достаточного количества времени на решение одной задачи различными способами не имеет под собой основы: для математического развития учащихся, для развития их творческого мышления. Гораздо полезнее решить одну задачу несколькими способами и не жалеть на это времени, чем решить несколько однотипных задач одним способом, из различных способов одной и той же задачи. Нам надо предложить учащимся выбрать наиболее рациональный.

При отыскании различных способов решения задач у школьников формируется познавательный интерес, развиваются творческие способности, вырабатываются исследовательские навыки. После нахождения очередного метода решения задачи учащийся, как правило, получает большое моральное удовлетворение. Общие методы решения задач должны стать прочным достоянием учащихся, но наряду с этим необходимо воспитывать у них умение использовать индивидуальные особенности каждой задачи, позволяющие решить её проще. Именно отход от шаблона, конкретный анализ условий задачи являются залогом успешного её решения.

3. Пять основных методов, применяемых в решении задач

Сначала рассмотрим метод координат. Он считается самым универсальным методом решения геометрических задач. Однако учащиеся старших классов при вступительных экзаменов в вузы редко пользуются этим методом. Укажем две причины такого положения.

Во-первых, в школе не изучается полном объеме необходимый теоретический материал. Так в учебнике Л.С. Атанасяна «Геометрия 7-11» нет уравнения прямой, проходящей через две данные точки, показано лишь на числовом примере, как вывести такое уравнение. Во-вторых, в учебных пособиях по геометрии мало задач, эффективно решаемых этим методом.

То же самое следует сказать относительно векторного метода. Например, в учебнике формула деления отрезка в данном отношении в теоретической части темы «Векторы» не рассматривается. Она отнесена к задачам на доказательство, используется только два раза и в дальнейшем не применяется.

Обратившись к геометрическому методу, учащиеся могут испытать трудности в связи с тем, что некоторые теоремы, имеющие большое значение для решения задач (например, теорема о касательной и секущей к окружности), теперь не изучаются специально, а отнесены к задачам на доказательство. Поэтому при повторении планиметрии в старших классах целесообразно дополнительно рассмотреть некоторые вопросы теории, углубить и систематизировать пройденный материал.

На вступительных экзаменах в вузы абитуриентам чаще всего решают планиметрические задачи на вычисление, использую алгебру и тригонометрию, т. е. алгебраическим и тригонометрическим методами. Но как будет видно из дальнейшего, геометрические решения могут оказаться проще и изящнее, хотя к ним можно прийти, только догадавшись провести некоторые вспомогательные линии.

В качестве примера рассмотрим две задачи, предлагавшиеся в 1992 году на письменном экзамене по математике в МГУ. Первая задача была дана на географическом факультете. С ней справилось 16% абитуриентов, поступавших на этот факультет. Вторая задача предполагалась на химическом факультете.

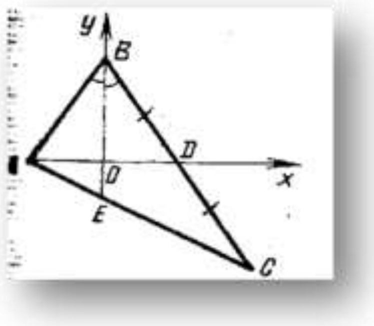
Способ 1 (координатный)

Примем точку О за начало прямоугольной системы координат, оси Ох придадим направление вектора $\overrightarrow{OD}$ и будем считать $\frac{|\overrightarrow{OD}|}{2}$ единицей масштаба. В данной системе точки A, D, B имеют координаты: A(-2; 0), D(2; 0) и B(0; b). Для того, чтобы определить длины сторон треугольника ABC, надо найти число b. Выразим через b координаты точек C и E. Так как D – середина отрезка BC, то C(4; b). Для точки E(0; y). Вторую координату точки E найдем, пользуясь тем, что точка E принадлежит прямой AC. Уравнение прямой имеет вид: $\frac{x+2}{6}=\frac{y}{-b}$. При x = 0 $y=-\frac{1}{3}b$. Следовательно, BE = $\frac{4}{3}b$. По условию задачи BE = 4,

значит, $\frac{4}{3}b$ = 4, ли b =3.

Итак, A(-2; 0), B(0; 3) , C(4; -3). Зная координаты вершин треугольника ABC, найдем его стороны: AB = $\sqrt{2}$. BC = $2\sqrt{13}$, AC = $3\sqrt{5}$.

Способ 2 (векторный)



Положим $\overline{BA}=\overline{a}, \overline{BC}=\overline{c}$. Векторы $\overline{BE}$ и $\overline{AD}$ выразим через $\overline{a}$ и $\overline{c}$. Так как BC = 2 BD, то CE = 2AE. Пользуясь формулой деления отрезка в данном отношении, получим:

$\overline{BE}=\frac{\overline{c}+2\overline{a}}{3}$. Согласно правилу вычитания векторов. Имеем: $\overline{AD}=\frac{1}{2}\overline{c}+\overline{a}$. Длины векторов $\overline{BE}$ и $\overline{AD}$ известны. Пусть $|\overline{a}|=a,$

тогда $|\overline{c}|=2a$. Вычислив скалярные квадраты векторов $\overline{BE}$ и $\overline{AD}$, получим уравнения: $2a^2+\overline{a}\overline{c}=3$(, $2a^2+\overline{a}\overline{c}=1$(. Отсюда a^2 = 13 и $\overline{a}\overline{c}=10$. Значит, AB = $\sqrt{13}$, BC = $2\sqrt{13}$.

Найдем теперь сторону AC, пользуясь векторной формулой теоремы косинусов: $AC^2 = 5c^2 - 2\overline{a}\,\overline{c}$.Подставив значения получим: $AC = 3\sqrt{5}$.

Способ 3 (аналитический)

Медиану AD и биссектрису BE треугольника ABC выразим через длины a,b,c сторон треугольника по формулам:

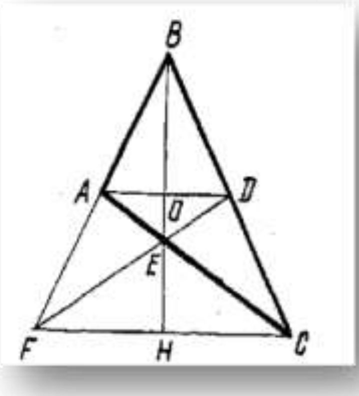
$AD^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$, $BE^2 = ac - a_1c_1$, где $a_1 = CE$ и. $c_1 = AE$ Пусть AB = x, AL = y, тогда BC =2x и CE = 2y. Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{a^2+9y^2}{2} - x^2 = 1, \\ x^2 - y^2 = 8. \end{cases}$$

Отсюда, $x^2 = 13$, $y^2 = 5$. Значит, $AB = \sqrt{13}$, $BC = 2\sqrt{13}$.

Способ 4 (тригонометрический, с применением теоремы косинусов)

Обозначим AB = x., ∠ABC = 2a. По теореме косинусов из треугольников ABE и BCE находим: $AE^2 = x^2 + 16 — 8x$ сов α, $CE^2 = 4x^2 + 16 — 16x$ сов α. Учитывал, что CE = 2AE или $CE^2 = 4AE^2$, получаем: x сов α = 3. Но x сов о = BO, значит, BO = 3 и OE = 1. Остается, пользуясь теоремой Пифагора, вычислить стороны треугольника ABC.



Рассмотрим теперь несколько способов, которые относятся к одному методу – геометрическому.

Способ 5 (с помощью площадей)

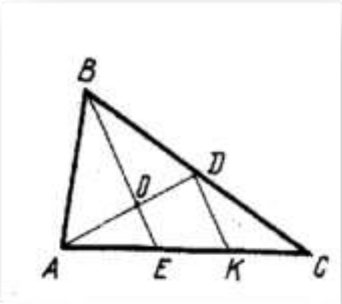
Так как AO = OD = 2, BE = 4 и AD и BE перпендикулярны, то площадь каждого из треугольников BAE и BDE равна 4 .Площадь треугольника CDE также равна 4, так как медиана ED делит треугольник BCE на два равновеликих треугольника. Значит, площадь треугольника ABC равна 12. Поскольку AD — медиана треугольника ABC, то площадь треугольника ABD равна 6. Остается применить формулу площади треугольника. Получим: AO × BO = 6. Но AO = 2, значит, BO = 3. Стороны треугольника ABC найдем по теореме Пифагора. Итак, задача решается устно, если догадаться соединить точки D и E и вычислять площади треугольников.

Способ 6 (с помощью осевой симметрии)

Точки A и D симметричны относительно биссектрисы BE. Построим еще точку, симметричную точке C относительно прямой BE. для этого продолжим отрезок DE до пересечения с прямой AB и обозначим через D точку пересечения прямых AB и DE.Получим равнобедренный треугольник BCF, из равенства треугольников BEF и BEC следует, что BF = BC. Продолжим еще

Рис. 1

биссектрису BE до пересечения с CF в точке H. Тогда BH – биссектриса треугольника BCF, а, следовательно, и его медиана. Таким образом, E – точка пересечения медиан треугольника BCF, и поэтому EH = 0,5BE = 2, а BH = 6. Средняя линия AD треугольника BCF делит медиану BH пополам, поэтому BO = 3. далее поступаем так же, как при решёнии задачи другими способами. Как видим, вспомогательные построения привели к простому, чисто геометрическому способу решения задачи.



Способ 7 (по теореме о средней линии треугольника)

Проведем среднюю линию DK треугольника BCE (рис.8). Так как DK параллельна BE и AO = OD, то OE - средняя линия треугольника ADK. Следовательно, OL = $\frac{1}{2}DK$ и DK = $\frac{1}{2}$BL, т.е. OL = $\frac{1}{4}BE.$ Так как BL= 4, то OL= 1 и BO = 3.

Из приведенного решения видно, что отношение BO/OE не зависит от длин отрезков BE и AD. Найти это отношение можно также, используя лишь тот факт, что AD — медиана треугольника ABC и AO = OB, причем без всяких вспомогательных построений.

Способ 8 (по теореме Менелая)

Секущая BE пересекает стороны треугольника ACD в точках E и O . По теореме Менелая из треугольника ACD имеем: $\frac{AE}{EC}\cdot\frac{CB}{BD}\cdot\frac{DO}{OA}=1$, а так как CB/BD = 2иDO = OA, то $AE=\frac{1}{2}BC$.

Применив теперь теорему Менелая к треугольнику BCE и секущей AD, получим: $\frac{BO}{OE}\cdot\frac{EA}{AC}\cdot\frac{CD}{DB}=1$. Но EA//AC = 1/3 и CD=DB. Следовательно, BO/OE

рис8

= 3. Изучение теоремы Менелая не предусмотрено программой по геометрии. Формулировка и доказательство теоремы имеются во многих учебных пособиях по геометрии.

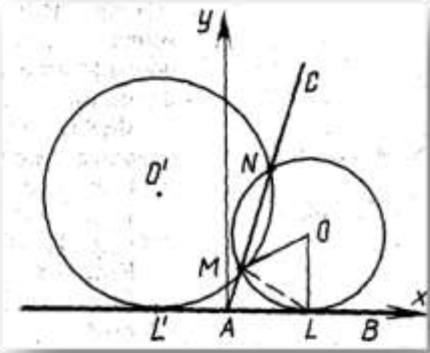
Кроме приведенных решений можно отыскать и другие, но, наверное, более сложные, чем геометрические способы V—VII.

Основным методом решения геометрических задач в условиях экзамена является аналитический метод, применение которого не требует особой изобретательности. Тем не менее, важно, владеть геометрическими приемами, уметь находить наиболее простое и красивое решение с помощью дополнительных построений. Даже решая планиметрическую задачу алгебраическим методом, следует пользоваться и геометрическими соображениями, благодаря которым часто удается упростить решение.

Задача 2. Точки M и N лежат на стороне AC треугольника ABC на расстояниях соответственно 2 и 6 от вершины A. Найти радиус окружности, проходящей через точки M и N и касающейся прямой AB, если $\angle$BAC = 30°.

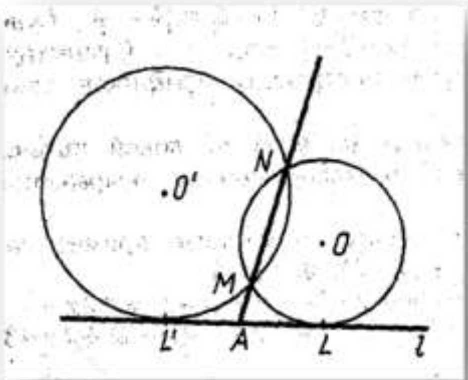
На уроках геометрии редко встречаются задачи на вычисление, имеющими более одного решения, а здесь как раз такая задача. Поэтому ее разбор целесообразно начать с решения соответствующей задачи на построение:

«Построить окружность, проходящую через две данные точки M и N и касающуюся данной прямой l»



Решение: достаточно рассмотреть случай, когда точки M и N лежат по одну сторону от прямой 1 и прямая MN пересекают 1 в некоторой точке A. Пусть окружность, проходящая через точки M и N, касается прямой 1 в некоторой точке L. Для решения задачи воспользуемся теоремой о секущей и касательной к окружности. Обозначим AM = a, AN = b и AL = x. Тогда x^2 = ab, x = $\sqrt{ab}$. Построив отрезок AL = x, а затем и точку L на данной прямой, опишем около треугольника LMN окружность.

Способом от противного легко доказать, что построенная окружность касается прямой 1 в точке L. Поскольку на прямой 1 существуют две точки, лежащие по разные стороны от точки A на расстоянии $\sqrt{ab}$ от нее, то условию задачи удовлетворяют две окружности и задача имеет два решения. Перейдем к решению задачи на вычисление радиусов построенных окружностей. Заменив числовые данные буквенными, сформулируем задачу следующим образом.



Задача 2*. Через точки M и N лежащие на стороне AC угла BAC, проведена окружность, касающаяся прямой AB. Найти радиус окружности, если AM = a, AN = Ь и $\angle$ BAC =α.

Рассмотрим несколько способов решения.

Способ 1 (координатный)

Введем на плоскости прямоугольную систему координат с началом в точке A и осью абсцисс, имеющей направление луча AB (рис. 10). Воспользуемся тем, что если L - точка касания окружности с прямой AB, то

AL= $\sqrt{ab}$. Значит, центр О окружности, лежащий внутри угла ВАС, будет иметь координаты: О ($\sqrt{ab}$; г), где г — радиус окружности. А так как АМ = а и $\angle$ ВАС = а, то точка М имеет координаты: М(а cos α; а siп α). Применив формулу расстояния между двумя точками (О и М) и учитывая, что ОМ = r получаем уравнение:

$$(a \cos \alpha - \sqrt{ab})^2 + (a \sin \alpha - r)^2 = r^2.$$

Отсюда радиус r' второй окружности, касающейся оси абцисс в точке L' (- $\sqrt{ab}$; r), очевидно будет

$$r' = \frac{a+b+2\sqrt{ab}\cos\alpha}{2\sin\alpha}$$

При а = 2, b = 6 и α = 30^0 получим: г = 2 и г' = 14. Заметим, что если не пользоваться соотношением AL= $\sqrt{ab}$, вытекающим из теоремы о секущей и касательной к окружности, то решение задачи усложняется: придется составить систему из двух уравнений, используя условие ОМ = ON = r.

Может показаться удивительным, но задача может быть весьма просто решена и векторным способом.

Способ 2 (векторный)

Рассмотрим четырехугольник AMOL. Согласно правилу сложения векторов, имеем: $\overline{OM} = \overline{OL} + \overline{LA} + \overline{AM}$ Вычислим скалярный квадрат вектора $\overline{OM}$. Учитывая, что АМ = α,

AL = $\sqrt{ab}$,, ОМ = OL = r. $\angle$ A = α

$\angle$ ALO = 90°, получим: $r^2 = r^2 + ab + a^2 + 2ab \cos (90^0+\alpha) +$

$+ 2a\sqrt{ab} \cos (180^0-\alpha)$.

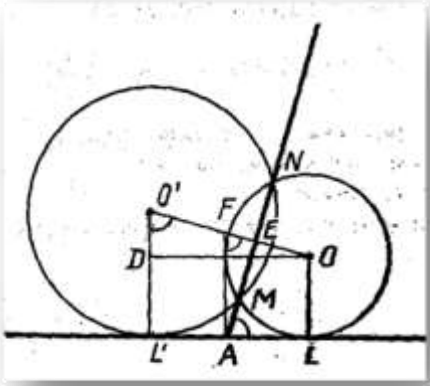
Отсюда получаем

$r = \frac{a+b-2\sqrt{ab}\cos\alpha}{2\sin\alpha}$, и OM = OL + LA + AM

Вторая окружность, проходящая через точки М и N. касается стороны угла, смежного с углом ВАС, поэтому, заменив здесь α на 180° - α, получим формулу

$r' = \frac{a+b+2\sqrt{ab}\cos\alpha}{2\sin\alpha}$, для вычисления радиуса т' второй окружности.

Задачу можно решить и традиционными средствами с использованием теоремы косинусов и синусов.



Способ 3 (тригонометрический)

В четырехугольнике AMOL имеем: AM = a, AL = $\sqrt{ab}$, OM = OL = r, ∠ MAL = α, α = 90°. Пусть LM = y и ∠ALM = β, (рис. 10).

Применим теоремы косинусов и синусов к треугольнику ALM. Получим:

$y^2 = a^2 - 2ab\cos\alpha$ $\frac{y}{\sin\alpha} = \frac{a}{\sin\alpha}$.

Треугольник LOM равнобедренный, OL = OM = r.

∠OLM = 90° - β. Снова применив теорему синусов, получаем еще одно уравнение:

$y = 2r\sin\beta$.

Исключив из двух последних уравнений sin β, представим y^2 в виде $2ar\sin\alpha$ и подставим полученное выражение для y^2 в первое уравнение. Тогда

$2r\sin\alpha = a + b - 2ab\cos\alpha$

Отсюда находим r, т. е.

$$r = \frac{a + b - 2\sqrt{ab}\cos\alpha}{2\sin\alpha},$$

Далее поступаем так же, как при решении задачи векторным способом. Зададимся вопросом: нельзя ли соотношения r + r' вывести геометрически из условия задачи и воспользоваться ими для решения? Оказывается, это легко сделать. Покажем это решение.

Способ 4 (геометрический)

Для определенности будем считать, что α < 90°. Соединим центры O и O’ отрезком и проведем радиусы окружностей OL и O’L’. Получим прямоугольную трапецию OLL’ O’.

Проведем еще высоту OD трапеции.

Из условия AL = AL’ = следует, что OD = LL. Далее находим: O ‘D = r’- r и ∠ OO’L = 180^0 — ∠MAL’ = α. Таким образом, из прямоугольного треугольника ODO’ имеем:

r’- r = $2\sqrt{ab}$ ctg α.

Центры O и O’ окружностей лежат на серединном перпендикуляре к отрезку MN. Пусть E — середина отрезка MN и F - середина отрезка OO’. В силу свойства средней линии трапеции запишем: AF = (r + r ‘)/2 и AF параллелен L’ 0’. Значит, AFE = α. Легко установить, что AE = (a + b)/2 Из прямоугольного треугольника AEF находим: AF = (a + b)/ 2sin α.

Значит, r + r$'$ = $\frac{a+b}{\sin\alpha}$. Сложим равенства r’- r = $2\sqrt{ab}$ ctg α. и r + r$'$ = $\frac{a+b}{\sin\alpha}$, затем из второго вычтем первое и получим выражения r = $\frac{a+b-2\sqrt{ab}\cos\alpha}{2\sin\alpha}$ и r$'$ = $\frac{a+b+2\sqrt{ab}\cos\alpha}{2\sin\alpha}$ соответственно. Легко проверить, что формулы верны и в том случае, когда α = 90°.

В одной задаче - почти вся планиметрия!

Задача. В трапеции диагонали длиной 6 см и 8 см взаимно перпендикулярны. Найти длину средней линии трапеции.

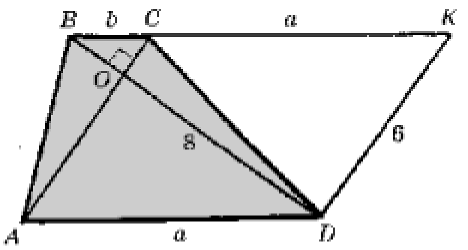
Способ 1

1. Продолжим *BC* вправо. Проведем *DK*||*AC.* Так как *ACKD*- параллелограмм, то D*K* = 6 см.

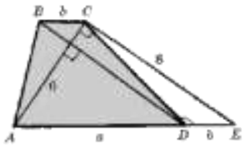
2*. BD* ⊥ *DK,* так как *BD* ⊥ *AC.* Δ *BDK* - прямоугольный,

BK=$\sqrt{BD^2+DK^2}$=10 (см)

3*. BK* = *BC* + *AD.* Средняя линия равна половине *BK,* т. е. 5 см. *Ответ:* 5 см.



Способ 2 (похожий на способ 1)



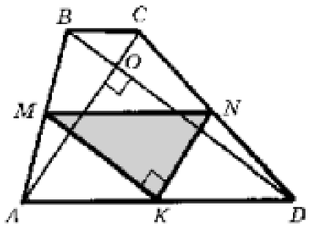
Проведем *CE* || *BD* до пересечения с продолжением *AD*. *DE* = *BC*, так как *DBCE* – параллелограмм. *AE* вычислим по теореме Пифагора из D *ACE* (*CE* || *BD*, но *BD* ^ *AC*, следовательно, *CE* ^ *AC*):

$$AE = \sqrt{AC^2 + CE^2}\ ;\ AE = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10\ (\text{см}).$$

AE = *a* + *b*. Но средняя линия равна $\frac{a+b}{2}$,
т. е. равна 5 см.

Ответ: 5 см.

Способ 3



1. *MN* – средняя линия трапеции. Проведем *MK* || *BD* и соединим точки *N* и *K*.

2. *NK* –средняя линия D *ACD*, следовательно, $NK = \frac{1}{2}AC;\ NK = 3\ (\text{см}).$

3. *MK* –средняя линия D *ABD*, следовательно, $MK = \frac{1}{2}BD;\ MK = 4$ (см).

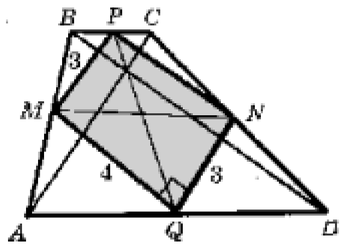
4. < *MKN* = < *AOD* как углы с соответственно параллельными сторонами.

5. треугольник *MNK* прямоугольный.

$$MN = \sqrt{MK^2 + NK^2};\ MN = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5\text{ (см)}.$$

Ответ: 5 см.

Способ 4



Соединим середины сторон трапеции. Легко доказать, что *MPNQ* – параллелограмм с прямым углом, т. е. прямоугольник со сторонами 3 см и 4 см. Диагонали его *MN* = *PQ* = 5 см (египетский треугольник).

Ответ: *MN* = 5 см.

Способ 5

Продолжим *AC* за точку *A* так, что *AM* = *OC*. Продолжим *BD* за точку *D* так, что *DN* = *BO*. Итак, D *OMN* – прямоугольный с катетами 6 см и 8 см. По теореме Пифагора *MN* = 10 см. Проведем *AE* ^ *MN*, *DF* ^ *MN*, *OK* ^ *BC*.

$$\left.\begin{array}{l}\Delta AME = \Delta KOC \\ \Delta DFN = \Delta BKO\end{array}\right\}\ \text{по стороне и двум прилежащим к ней углам.}$$

Следовательно, *ME* = *KC* и *FN* = *BK*, т. е. *MN* = *AD* + *BC* = 10 (см).

Средняя линия равна $\frac{AD + BC}{2} = \frac{MN}{2} = \frac{10}{2} = 5.$

Ответ: 5 см.

Способ 6

Пусть $OC = x$, $BO = y$; тогда $AO = 6 - x$, $DO = 8 - y$. MN – средняя линия.

1. Из подобия треугольника BOC и треугольника AOD имеем:

$$\frac{x}{6 - x} = \frac{y}{8 - y},$$

$$8x - xy = 6y - xy,$$

$$8x = 6y,\ y = \frac{4}{3}x.$$

2. Из прямоугольного треугольника BOC имеем: $BC = \sqrt{x^2 + \left(\frac{4}{3}x\right)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{16}{9}x^2} = \sqrt{\frac{25}{9}x^2} = \frac{5}{3}x.$

3. Из подобия треугольника BOC и треугольника AOD имеем:

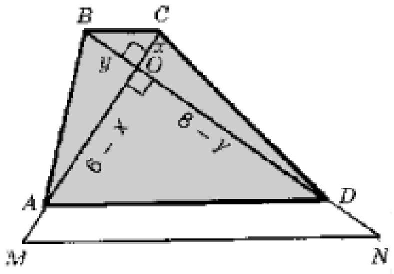
$$\frac{BC}{AD} = \frac{OC}{AO},\ \frac{\frac{5}{3}x}{AD} = \frac{x}{6 - x},$$

$$AD = \frac{5}{3}(6 - x) = 10 - \frac{5}{3}x.$$

4. $MN = \frac{AD + BC}{2} = \frac{\frac{5}{3}x + 10 - \frac{5}{3}x}{2} = 5.$

Ответ: 5 см.

Способ 7



1. Из подобия D *BOC* и D *AOD*: $\frac{x}{6-x} = \frac{y}{8-y}, y = \frac{4}{3}x.$

2. Продолжим диагонали на отрезки, равные *CO* и *BO*.

3. Из D *MON*: *MN* = 10 см.

4. D *AOD* подобен D *MON*; $MN = \frac{4}{3}AD,\ AD = \frac{3}{4}MN = \frac{3}{4}\cdot 10 = 7{,}5$ (см).

5. В D *BOC*: $BC = \sqrt{x^2 + \left(\frac{4}{3}x\right)^2} = \frac{5}{3}x.$

6. D *BOC* подобен D *AOD*.

$$\frac{BC}{AD} = \frac{OC}{AO},\ \frac{\frac{5}{3}x}{7,5} = \frac{x}{6-x};$$

$$10x - \frac{5}{3}x^2 = 7{,}5x,$$

$$2{,}5x = \frac{5}{3}x^2;\ 7{,}5 = 5x;\ x = 1{,}5 \text{ (см)}.$$

7. $BC = \frac{5}{3}x = \frac{5}{3}\cdot 1{,}5 = 2{,}5$ (см).

8. Средняя линия равна $\frac{AD + BC}{2} = \frac{7,5 + 2,5}{2} = 5.$

Ответ: 5 см

Способ 8 (тригонометрический)

1. Из подобия D *BOC* и D *AOD*: $\frac{x}{6-x} = \frac{y}{8-y}, \quad y = \frac{4}{3}x.$

2. D *BOC* – прямоугольный. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} = \frac{\frac{4}{3}x}{x} = \frac{4}{3}.$

3. Найдем cosa либо по формуле $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha},$ либо методом треугольника: $\cos \alpha = \frac{3}{5}.$

4. Из D *BOC*: $\frac{OC}{BC} = \cos \alpha, \quad BC = \frac{OC}{\cos \alpha} = \frac{x \cdot 5}{3} = \frac{5}{3}x.$

5. Из D *AOD*: $\frac{AO}{AD} = \cos \alpha, \quad AD = \frac{AO}{\cos \alpha} = \frac{6-x}{\frac{3}{5}} = \frac{5(6-x)}{3}.$

6. Средняя линия равна. $\frac{AD + BC}{2}.$

$$\frac{AD + BC}{2} = \frac{\frac{5(6-x)}{3} + \frac{5}{3}x}{2} = \frac{10 - \frac{5}{3}x + \frac{5}{3}x}{2} = 5.$$

Ответ: 5 см.

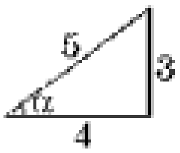
Способ 9 (тригонометрический)

1. Из подобия треугольников *BOC* и *AOD*: $\frac{x}{6-x} = \frac{y}{8-y}, \quad y = \frac{4}{3}x.$

2. $\frac{x}{6-x} = \frac{b}{a},$, $ax = 6b - bx$, $(a + b)x = 6b$,

$$\frac{a+b}{2}=\frac{3b}{x},\quad \frac{a+b}{2}=\frac{3}{\sin\ \alpha}.$$

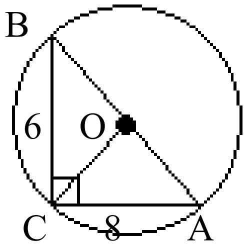
3. $$\mathbf{tg}\ \alpha=\frac{x}{y}=\frac{x}{\frac{4}{3}x}=\frac{3}{4},\ \alpha=\mathbf{arctg}\ \frac{3}{4}.$$

4. $$\frac{a+b}{2}=\frac{3}{\sin\left(\operatorname{arctg}\ \frac{3}{4}\right)}=\frac{3}{\frac{3}{5}}=5$$ $\left(\dfrac{\operatorname{tg}\ \alpha=\frac{3}{4}}{\sin\ \alpha=?}\right.$ 

$\left.\sin\ \alpha=\dfrac{3}{5}\right).$

Ответ: 5 см

Задача 3. Около прямоугольного треугольника с катетами 3 и 4 описана окружность. Найти радиус описанной окружности.



1) Геометрический метод. Мы знаем, что центр описанной окружности около прямоугольного треугольника лежит на середине гипотенузы. Найдем гипотенузу по теореме Пифагора:

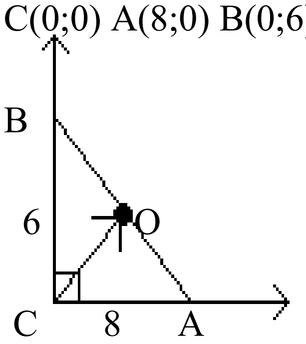
$$AB=\sqrt{6^2+8^2}=\sqrt{36+64}=\sqrt{100}=10$$

$$R=\frac{AB}{2}=\frac{10}{2}=5\ \text{(см).}$$

2) Решить задачу методом координат. Поместим треугольник ABC удобным образом в системе координат.

3)

C(0;0) A(8;0) B(0;6)



O - середина AB,

значит O (4, 3)

$$R = CO = \sqrt{(4-0)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

4) Векторный способ

$\overrightarrow{CO}$ {4; 3}

$$|CO| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

Заключение

В данной работе представлены основные методы решения геометрических задач из раздела «Планиметрия», которые описаны и представлены на примерах разных задач. А также найдены и решены задачи, решаемые разными методами. Проделанная работа подтверждает, что выдвинутая гипотеза справедлива. Действительно, изучать различные методы решения геометрических задач можно на примере одной задачи. Подробный разбор способов решения задач является хорошим подспорьем для того, чтобы освежить в памяти пройденный материал. Накопившиеся знания не будут лежать мертвым грузом, их постоянно нужно использовать, вспоминая, то одну, то другую теорему или свойство фигуры. Механическое заучивание формул и теорем не способствует развитию мышления. Использование же этих знаний на практике является творческой работой, при которой действенно учишься применять теорию на практике. Чтобы найти рациональный метод решения задачи, нужно хорошо знать эти методы, тогда легче ориентироваться в их выборе.

При решении задач разными способами формируется логическое мышление, развивается интуиция, систематизируются знания, расширяется общеобразовательный кругозор, накапливается полезный опыт. Можно овладеть основными методами решения задач, составляющих важную часть многих эвристических алгоритмов, учиться рационально, планировать поиск решения задачи, выполнять полезные преобразования условия задачи, а также использовать известные приемы познавательной деятельности – наблюдение, сравнение, обобщение и т.д.

Благодаря такой работе снимается психологический барьер перед поиском решения задач. Зная, что задача может быть решена разными способами, можно смелее браться за ее решение. Постепенно, решая задачу за задачей, приобретем некоторый опыт, что позволит развить математическое чутье.

Разбор задач, допускающих ряд решений, – увлекательное занятие, требующее знания всех разделов школьной математики. Длительная работа над одной и той же задачей часто полезнее, чем решение нескольких задач. Все перечисленное создает условия для формирования навыков исследовательской учебной деятельности, способствующей накоплению творческого потенциала.

Литература

1. Атанасян Л,С., ,Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. , Юдина И.И. Геометрия: Доп. главы к шк. учеб. 9 кл.: Учеб. пособие для учащихся шк. с углубленным изучением математики . - М.: Просвещение, 1997.
2. Белугин В.И., Т.В. Величко, Э.Е.Поповский. Высшая математика: Метод. руководство и контрольные задания. – М.: Просвещение, 2000.
3. Готман Э.Г. Две задачи и пять методов решения // Математика в школе. – 1994. - №1 – С. 8 – 11.